MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DES ŒUVRES UNIVERSITAIRES **(DGES)**

DIRECTION DE l'ORIENTATION ET DES EXAMENS **(DOREX)**

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

Concours AMCPE session 2013

Composition : <u>Mathématiques 5</u> (algèbre, analyse)

Durée : 3 Heures

Cette épreuve comporte deux exercices indépendants

EXERCICE I

1-Pour $x \in \left]-\infty;1\right[$,on pose $f(x) = \ln(1-x)$ .Montrer que f est dérivable sur $\left]-\infty;1\right[$ et calculer sa dérivée. Que vaut $f'(0)$.

2-Justifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{x}$,définie sur $\left]-\infty;1\right[\setminus \{0\}$ est prolongeable par continuité en 0.

Dans la suite on pose $F(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt \quad x \in \left[-1;1\right[$.

3-a) Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{x}$ en précisant le rayon de convergence.

3-b) En déduire que pour tout $x \in \left]-1;1\right[\quad F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

4-a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Dans la suite, on admettra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4-b) Montrer que, pour tout $x \in \left[0;1\right[$ et tout entier $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \leq \quad F(x) \quad \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$.

4-c) Démontrer que la fonction F est prolongeable par continuité en 1.on notera encore F ce prolongement par continuité. Préciser F(1).

5-a) Calculer la dérivée de la fonction g définie sur l'intervalle $\left]0;1\right[$ par $g(x) = F(x) + F(1-x)$.

5-b) En déduire que, pour tout $x \in \left]0;1\right[$, $F(x) + F(1-x) = F(1) - \ln(x)\ln(1-x)$.

5-c) Déterminer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$.

6-a) Montrer que, pour tout $x \in \left]-1;1\right[$, $F(x) + F(-x) = \dfrac{1}{2}F(x^2)$.

6-b) Justifier la convergence et déterminer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

EXERCICE II
Les parties I et II sont indépendantes

PARTIE I

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice A.

1-Calculer les valeurs propres de u et justifier que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

2-On note λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de u avec $\lambda_1 \prec \lambda_2 \prec \lambda_3$.Déterminer, pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, le vecteur e_i de $\mathbb{R}^3$ dont la deuxième composante vaut 1 et vérifiant $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

3-Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice Δ de u relativement à cette base, puis donner la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à cette base et écrire la relation entre Δ, A et P.

4-Si $B \in M_3(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant $B^2 = A$, on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé.

4-a) Vérifier que $v^2 = u$ et que $u \circ v = v \circ u$.

4-b) Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$,calculer $u \circ v(e_i)$ et en déduire que est $v(e_i)$ colinéaire à e_i.

4-c) Conclure que la matrice V de v relativement à la base (e_1, e_2, e_3) est diagonale de la forme $V = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$ et en déduire les valeurs possibles de a_1, a_2 et a_3.

5-Trouver alors toutes les solutions dans $M_3(\mathbb{R})$ de l'équation $X^2 = A$.
Combien y en a-t-il ?

PARTIE II

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites vérifiant les relations suivantes

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n + z_n \\ z_{n+1} = 2z_n \end{cases}$$

Exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de n